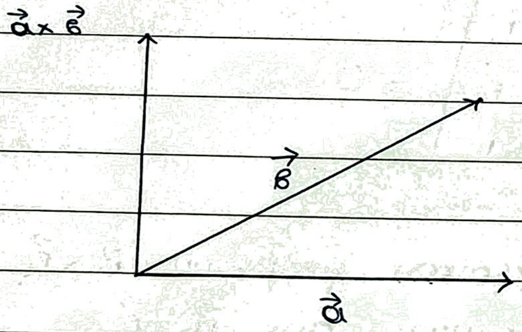
Μαθημα 7ο — No. — Date 8/3/2016

Αναλυτική Γεωμετρια

$\vec{a} \times \vec{b}$ Εξωτερικο διανυσμα

νεο διανυσμα με μετρο $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin(\vec{a},\vec{b})$
και φορά τετοια ωστε το συστημα αναφορας
$(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ να ειναι δεξιοστροφο



$\vec{a}\times\vec{b}$: καθετο στο επιπεδο των $\vec{a},\vec{b}$

$\vec{x}_0 = \vec{e}_1 = (1,0,0)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\Longrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{x}_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{y}_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{z}_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{x}_0(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{y}_0(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{z}_0(a_1b_2 - a_2b_1) =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

τυχαιο διανυσμα

σε ορθοκανονικο: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

σε μη ορθοκανονικο: $\vec{a} = a_1\vec{x}_0 + a_2\vec{y}_0 + a_3\vec{z}_0$
$\vec{b} = b_1\vec{x}_0 + b_2\vec{y}_0 + b_3\vec{z}_0$

$$-\ \vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{x}_0 + a_2\vec{y}_0 + a_3\vec{z}_0) \times (b_1\vec{x}_0 + b_2\vec{y}_0 + b_3\vec{z}_0) =$$
$$= \dots = a_1b_2\, \vec{x}_0\times\vec{y}_0 + \dots + a_2b_1\, \underbrace{\vec{y}_0\times\vec{x}_0}_{= -\vec{x}_0\times\vec{y}_0} + \dots$$

σε ορθοκανονικο : $\vec{x}_0 \times \vec{y}_0 = \vec{z}_0$

$$\vec{x}_0 \times \vec{z}_0 = \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_0 \times \vec{z}_0 = \vec{x}_0$$

Επισης $\vec{x}_0 \times \vec{x}_0 = \vec{0} = \vec{y}_0 \times \vec{y}_0 = \vec{z}_0 \times \vec{z}_0$

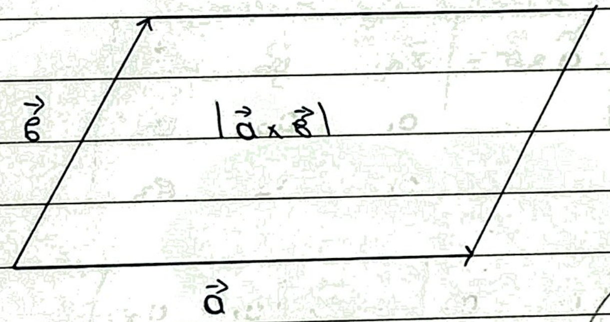
Εφαρμογη

Τρια σημεια $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$

συνευθειακα $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Αποδειξη

Ειδαμε οτι το μετρο του εξωτερικου γινομενου $\vec{a} \times \vec{b}$ εκφραζει το εμβαδο του παραλληλογραμμου των $\vec{a}, \vec{b}$



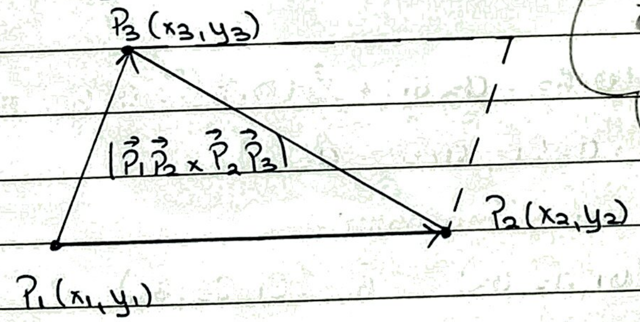
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

στο Oxy :



Εμβαδο : $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} |\vec{P_1P_2} \times \vec{P_2P_3}| = (*)$

$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$

$\vec{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$

Αρα $(*) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} \right| =$ → μετρο διανυσματος → οριζουσα

$$= \frac{1}{2} \left| (0, 0, [(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)]) \right| =$$

$$\left\{ \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+[\dots]^2} = \frac{1}{2}[\dots] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left| (x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Επομενως τα σημεια συνευθειακα $\Longleftrightarrow$ το $P_1\overset{\Delta}{P_2}P_3$ έχει εμβαδο μηδεν $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Μεικτο γινομενο διανυσματων $\left\{ \begin{array}{l} \text{ενα εξωτερικο (γινομενο)} \\ \text{με ενα εσωτερικο} \end{array} \right\}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) \overset{\text{μεικτο}}{=\!=} \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{διανυσμα}} \cdot \underbrace{\vec{\gamma}}_{\text{διανυσμα}} \quad \text{ή} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{\gamma})$$

εσωτερικο

⇒ αριθμος

No. Date

Ιδιοτητες

(1) Το μεικτο γινομενο ειναι αριθμος

(2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ ή $\vec{\gamma} = \vec{0} \iff$ τα $\vec{a}, \vec{b}$ συγγραμ.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\gamma}$

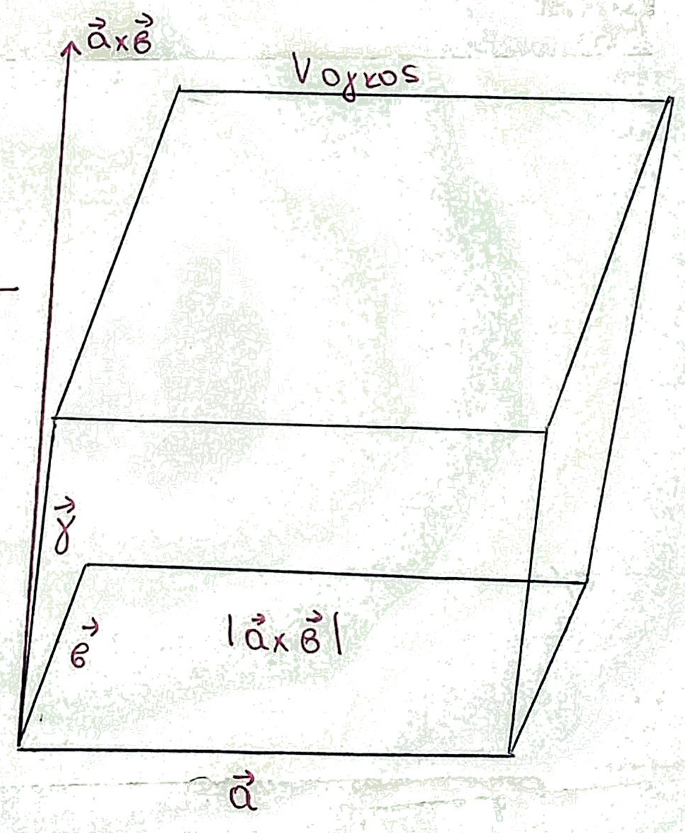
Αν $\vec{a}, \vec{b}$ συγγραμμικα $\iff \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$

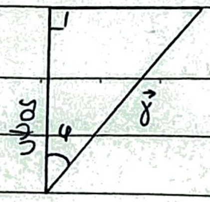
$$\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $\vec{a} \times \vec{b}$: εμβαδο του παραλ. με πλευρες $\vec{a}, \vec{b}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma})$ ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$

Υψος του Παραλληλ. ειναι η προβολη του $\vec{\gamma}$ στο $\vec{a} \times \vec{b}$





$$\cos\varphi = \frac{|\upsilon|}{|\vec{\gamma}|} \Rightarrow |\vec{\upsilon}| = |\vec{\gamma}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow$$

$$|\vec{\upsilon}| = |\vec{\gamma}|\cdot\cos(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma})$$

$V = $ (εμβαδό βάσης) $\cdot$ ύψος $=$

$$= |\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\cos(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \overset{(*)}{=} |(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma})| = |(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})|$$

(*) $(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\delta} = |\vec{\varepsilon}||\vec{\delta}|\cdot\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\delta}))$

(4) Ισχύει $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$

Στο μεικτό γινόμενο εναλλάσσονται τα εσωτερικά/εξωτερικά γινόμενα

(5) $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = -(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ γιατί $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = -\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$

(6) $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$

{Έχουν την ίδια σειρά ουσιαστικά κυκλικές μετατοπίσεις}

Απόδειξη

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = (\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha} = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha})$$

$\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa} \Rightarrow \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\kappa} = \vec{\kappa}\cdot\vec{\varepsilon}$

(7) Έστω $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$

(Θα δουλεύουμε σε ορθοκανονικό σύστημα)

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \langle \vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$$

{Η λύση της ορίζουσας είναι μεικτό γινόμενο}

(8) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$

↳ ορίζουσα

No. Date

Γεωμετρικη ερμηνεια της 3x3 οριζουσας

Ειδαμε οτι $|(\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma})|$ = ογκος του παραλληλεπιπεδου των $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$

Αρα η γεωμετρικη ερμηνεια της 3x3 οριζουσας:
η απολυτη τιμη αυτης $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\right|$ ειναι

ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες τα
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \in \mathbb{R}^3$

Αποδειξη για την ιδιοτητα (8)

$\vec{a}\times\vec{\beta} \perp$ στο επιπεδο των $\vec{a},\vec{\beta}$ (*)

Αρα $(\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0 \Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=0 \Leftrightarrow$ τα $\vec{a}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ειναι καθετα μεταξυ τους

αλλα και $\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$

δηλ: $\left.\begin{matrix}\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{\gamma} \\ \vec{\beta}\perp\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\vec{a}\parallel\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a},\vec{\gamma} \text{ συνεπιπεδα} \\ \vec{\beta}\parallel\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta},\vec{\gamma} \text{ συνεπιπεδα}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ συνεπιπεδα

! Σημαντικη η γεωμετρικη κατανοηση του εσωτερικου και εξωτερικου γινομενου